EL USO DEL CABRI GEOMETRY EN LAS AULAS DE SECUNDARIA Y SU EFECTO EN EL APRENDIZAJE Y LA ACTITUD HACIA LAS MATEMÁTICAS

Nancy M. García Castillo
Jaime Rodríguez Gómez
ncy_picky@hotmail.com

RESUMEN

El estudio tuvo como propósito conocer la relación entre el uso de Cabri Geometry en la clase de matemáticas y su efecto en el aprendizaje y actitud hacia dicha disciplina en estudiantes de Secundaria. Para lograrlo se utilizó un diseño pre-experimental con grupo control. Después de la intervención en el grupo experimental se observó un efecto positivo en el aprendizaje de la geometría pero no se observó un incremento en la actitud del estudiante hacia las matemáticas.

Palabras clave: Cabri Geometry, actitud hacia las matemáticas, geometría dinámica, aprendizaje matemático.

Introducción

La evolución de las herramientas de computación en la práctica y la enseñanza de las matemáticas están relacionadas con una profunda evolución de las herramientas de cálculo, según lo explica Trouche (2005). Es más, las calculadoras han estado evolucionando y han sido trasladadas desde los científicos hasta los estudiantes, así como la cultura informática en la escuela. A la par, el estudiante va adquiriendo familiaridad con las herramientas computacionales, con lo cual se va instalando una base cultural (Carrillo, 2006).

En México, la Secretaría de Educación Pública (SEP), a través de su proyecto de modernización educativa (1993), creó un programa de introducción de tecnología en la educación secundaria denominado “Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología” (EMAT). Se han formulado propuestas para su uso tanto en el aprendizaje de las matemáticas como en ciencias. En este sentido, la investigación realizada se propuso valorar el aprendizaje y la actitud hacia las matemáticas cuando se introduce una de las herramientas propuestas, específicamente, el software de geometría dinámica Cabri Geometry.

El Cabri Geometry es el programa para geometría interactiva más utilizado en el mundo (Eduteka, 2004). Incluye geometría analítica, transformacional y euclidiana. Sus funciones abarcan la construcción de puntos, líneas, triángulos, polígonos, círculos y otros objetos geométricos básicos. Permite traslación, dilatación, rotación de objetos geométricos, reflexión, simetría e inversión. Todo esto en un ambiente de geometría dinámica, definido por Ab´anades, Escribano y Botana (2007), como la familia de aplicaciones computacionales que permiten, en la pantalla, dibujar los planos de diagramas geométricos y sus características principales, permitiendo la manipulación de estos diagramas y logrando que los elementos se autoajusten a los cambios.

Straesser (2002) explica que el aspecto central de la geometría dinámica es la identificación de un sustento teórico para utilizarla en los cursos de geometría, y en este sentido concuerda con Hadas, Hershkowitz y Schwarz (2002), exponiendo que la aparición de los ambientes geométricos ha generado muchas preguntas. Por ejemplo, respecto al rol de la demostración en el currículo, ya que la prueba puede ser obtenida muy rápidamente mediante procesos inductivos. Lo anterior es explicado parcialmente por Yerushalmy y Chazan (citados por Hadas, Hershkowitz y Schwarz, 2002), al declarar que un acercamiento abierto al uso del ambiente de geometría dinámica dará al estudiante la oportunidad de descubrir los atributos antes de ser invitado a probarlos. Hadas, Hershkowitz y Schwarz (2002) explican que los ambientes de geometría dinámica llevan a analizar diferentes procesos envueltos en las actividades de demostración. Y según Ab´anades et al (2007), la geometría dinámica involucra tres problemas principales: el problema de continuidad, implementación de demostraciones y descubrimiento, y determinación de lugares geométricos.

Straesser (2002) explica que la geometría en sí misma cambia cuando se utiliza un software de geometría dinámica como el Cabri Geometry. Inclusive dice que permite una facilidad para crear dibujos que ilustran la geometría sin alterarla. Con esto concuerda Moreno (2003), explicando que la visualización permite atender uno de los problemas claves de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el de la validación de los enunciados matemáticos.

El Cabri Geometry es la más poderosa extensión del tradicional papel y lápiz, comenta Hölzl (1996), y añade que los beneficios del Cabri Geometry se demuestran en los nuevos estilos de problemas hablados. Sin embargo, Assude (2005) destaca su integración en el tiempo que se necesita invertir utilizando el Cabri Geometry y advierte que se debe tener en cuenta que al integrarlo al salón de clases algunos de los temas finales no podrán ser incluidos.

Por otra parte, con respecto a las actitudes que genera hacia el estudio de las matemáticas, es pertinente comenzar haciendo una aclaración del término actitud. Para Aiken (citado por Del Puerto y Minnaard 2003) la actitud es una predisposición aprendida para responder positiva o negativamente ante un objeto, situación o persona, que implica la aprobación o desaprobación en un juicio moral. Percibe como elementos fundamentales el conocimiento, la experiencia y el sentimiento hacia el objeto, actividad o persona hacia el cual se valora la actitud. Existen varios métodos para medir las actitudes, asegura Aiken (citado por Del Puerto y Minnaard 2003), entre ellos: observación directa, técnicas proyectivas, indicadores fisiológicos, medición de asociaciones implícitas y escalas de actitud, siendo más popular la última citada.

Aiken (citado por Del Puerto y Minnaard 2003) puntualizó que las actitudes negativas de los estudiantes crecen a medida que van avanzando en el desarrollo académico, desde la escuela elemental hasta el nivel universitario. También notó que las actitudes y ansiedades son mejores predictores del desempeño en matemáticas de las mujeres que de los varones. Los varones han sido tradicionalmente vistos como mejores que las mujeres en la resolución de problemas.

En un estudio longitudinal, Hart (citado por Del Puerto y Minnaard 2003) analizó el comportamiento en la clase de matemáticas de un grupo de estudiantes de 17 años de ambos sexos. Observadores entrenados registraron las características de cada interacción entre el grupo de estudiantes y el maestro. Se observó más confianza en el autoaprendizaje de los alumnos. La confianza con respecto a la propia habilidad en el aprendizaje matemático marca también diferencias relacionadas con el sexo entre los estudiantes de la escuela elemental hasta los de la universidad. Los varones, a menudo tienen mayor puntaje que las mujeres en la propia confianza sobre su desempeño matemático.

Gómez (1997) explica que la nueva tecnología como la calculadora grafica puede afectar las actitudes de los estudiantes. Sin embargo en su investigación sobre las calculadoras gráficas y las actitudes de los estudiantes, no encontró diferencias significativas en las escalas de actitudes. En este marco entonces, se planteó la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuál es el efecto al utilizar Cabri Geometry, tanto en el aprendizaje como en la actitud hacia las matemáticas en los estudiantes del tercer año de secundaria del Instituto Soledad Acevedo de los Reyes, en el año 2008?

Metodología

Este trabajo se planteó con un diseño pre-experimental, ya que pretende determinar el efecto de una variable independiente o tratamiento, sobre dos variables dependientes. Para ello se seleccionó el diseño pre-prueba y pos-prueba con grupo de control, con selección aleatoria de los grupos pero no de los integrantes de cada grupo.

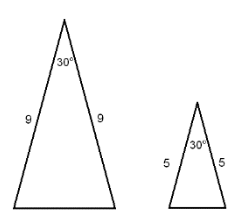
En el grupo experimental se entregaron 27 calculadoras voyage200 y 5 Titanium, otorgadas como préstamo por la compañía Texas Instruments de México. Los estudiantes tuvieron interacción con la calculadora únicamente durantes los horarios de clase, cinco periodos a la semana y durante tres semanas.

Según el problema de investigación, se involucran dos variables dependientes: aprendizaje de las matemáticas y actitud hacia las matemáticas. Como variable independiente se considera el uso del Cabri Geometry en la clase de matemáticas. A continuación se presenta cada una de las variables, así como los instrumentos utilizados para su medición y aplicación.

Aprendizaje de las matemáticas

El aprendizaje de las matemáticas se define como el conocimiento que el alumno posee sobre los contenidos de semejanza y proporcionalidad requeridos a nivel secundario. Para medir la variable se utilizó un examen que contiene dos secciones: siete preguntas de opción múltiples y cuatro de resolución de problemas. Cada examen fue calificado y valorado según el nivel de conocimiento en una escala de 0 a 10. A continuación se presentan las preguntas utilizadas en el examen.

1. La razón de 4 y 2 es 2, porque...
   a) $\frac{4}{2} = 2$ b) $4 - 2 = 2$ c) $2^2 = 4$
2. Cuando tenemos razones iguales entre segmentos significa que los segmentos siempre son:
   a) Congruentes b) Proporcionales c) Semejantes
3. Dos triángulos son semejantes cuando sus ángulos son:
   a) Congruentes b) Diferentes c) Proporcionales
4. Dos triángulos son semejantes cuando sus lados son:
   a) Iguales b) Diferentes c) Proporcionales
5. En base a la siguiente figura, ¿cuál de los criterios de semejanza nos ayuda a concluir que los triángulos son semejantes.
   a) AA
   b) LAL
   c) LLL



6. Marca **si** o **no** según se requiera en la condición mencionada para que dos figuras sean homotéticas:

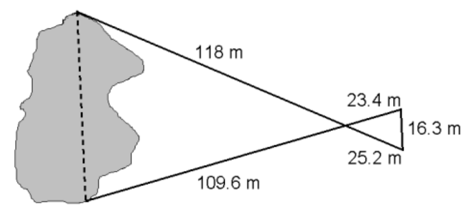
   a) Semejanza _____ Si ______ No
   b) Congruencia _____ Si ______ No
   c) Lados correspondientes paralelos _____ Si ______ No

7. Si se dibuja un edificio a escala de 1:15, la razón de sus perímetros también será de 1:15, la razón de sus áreas será:

   a) 1:15 b) 1:30 c) 1:225

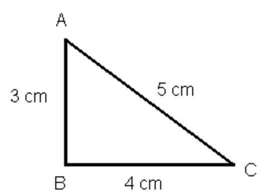
8. Halla el medio proporcional de los segmentos cuyas longitudes son de 2 y 18:

9. Calcula el ancho del lago utilizando la información que se provee en el dibujo.



10. Sobre la siguiente recta dibuja un segmento AB que cumpla con la razón de 3:7, y escribe la letra P para el punto división de la razón dada.

11. El triángulo ABC tiene un área de 6 cm^2. ¿Cómo construirías uno semejante cuya área sea la tercera parte?



Actitud hacia las matemáticas

Se considera la actitud hacia las matemáticas como la predisposición para responder positiva o negativamente ante las matemáticas y su aprendizaje. Implica tener tanto un conocimiento de las matemáticas como el haber tenido experiencias con ella y su aprendizaje. También involucra aspectos sentimentales o emocionales hacia las matemáticas.

Para medir la actitud hacia las matemáticas se utilizó una escala creada por la investigadora con ese propósito. Se basa en la identificación de algunas declaraciones de Aiken (citado por Del Puerto y Minnaard 2003) las cuales fueron modificadas y adaptadas a los contenidos y a los estudiantes de secundaria. La escala es de tipo Likert con 15 declaraciones para ser valoradas con las opciones: totalmente en desacuerdo (1), en desacuerdo (2), me da igual (3), en acuerdo (4) y totalmente en acuerdo (5). Las quince declaraciones utilizadas son:

1. Matemáticas es una materia muy interesante
2. Quiero desarrollar mis habilidades matemáticas
3. Matemáticas es una materia muy valiosa
4. Las matemáticas me hacen sentir nervioso e incómodo
5. En general he disfrutado al estudiar matemáticas en la escuela
6. Quiero tomar más cursos de matemáticas de los que inevitablemente tenga que tomar
7. Otras materias son más importantes que las matemáticas
8. Me siento muy tranquilo cuando estudio matemáticas
9. Casi nunca me ha gustado estudiar matemáticas
10. Estoy interesado en adquirir más conocimientos de matemáticas
11. Las matemáticas ayudan a desarrollar la mente y enseñan a pensar
12. Las matemáticas son especialmente importantes en la vida cotidiana
13. Las matemáticas son aburridas
14. Me gusta intentar resolver problemas nuevos en matemáticas
15. Las matemáticas son divertidas

Como se puede observar la mayoría de las declaraciones están redactadas de una manera positiva, con excepción de las declaraciones 4, 7, 9 y 13. Estas declaraciones fueron recodificadas antes de determinar la suma de las valoraciones para medir la actitud hacia las matemáticas. Dado que son 15 declaraciones y según la escala utilizada, la actitud tiene un rango de 15 a 75, donde valores cercanos a 75 implican una actitud favorable hacia las matemáticas.

Actividades realizadas con el Cabri Geometry

Se consideran las actividades realizadas con el Cabri Geometry como el tratamiento en la investigación experimental. Es decir, dicha variable fue manipulada ya que se aplicó a un grupo experimental para ver sus efectos en las variables dependientes. A continuación se describen las actividades que se realizaron con los estudiantes.

Actividades previas. Antes de considerar los contenidos respectivos de semejanza y proporcionalidad, los alumnos recibieron dos horas de clases sobre como manejar el software. La actividad fue la siguiente:

Conociendo el Cabri Geometry

Objetos geométricos. En el Cabri se identifican tres tipos de puntos: Punto, Punto sobre objeto y Punto de intersección.

1. Al seleccionar Punto [F2, 1], aparece un lápiz. Cuando se da ENTER se dibuja un punto. Se le puede asignar nombre inmediatamente después o posteriormente con Etiqueta [F7, 4]. Una vez creado el punto y oprimiendo ESC, desaparece el lápiz y si acercas el cursor al punto aparece una leyenda que dice “este punto”. Si en ese momento oprimes la tecla que tiene una mano, tomaras el punto y podrás moverlo en la pantalla. La etiqueta también puedes moverla, pero solo se moverá alrededor del punto; esto es para acomodarla donde no estorbe.

2. Tomemos ahora la opción de segmento [F2, 5]. Vuelve a aparecer el lápiz. Al momento de dar un Enter aparece un punto que será uno de los extremos del segmento. Posteriormente mueve el lápiz y al dar otro Enter aparecerá el otro extremo del segmento. También puedes usar un punto ya dibujado para tomarlo como extremo, sólo posiciona el lápiz encima de él hasta que diga "este punto" y oprime Enter. Una vez creado el segmento y oprimiendo ESC, desaparece el lápiz y ahora puedes tomar los puntos extremos o el segmento y moverlo en la pantalla.

3. Punto sobre objeto [F2, 2]. Dibuja un punto sobre el segmento que construiste e intenta mover ese punto. ¿Es posible mover el punto sobre el segmento o por toda la pantalla?

4. Traza ahora una recta. Hay varias formas de trazar una recta. Una de ellas es seleccionando la opción [F2, 4]. Al hacerlo aparece de nuevo el lápiz. Si das un Enter aparece un punto que es por donde pasará la recta. Al mover el cursor aparecerá la recta de tal forma que podrás darle la dirección que tú quieras. Si das Enter de nuevo, quedará construida la recta.

Otra manera de construirla es definiéndola mediante dos puntos. Es decir, después de seleccionar la opción [F2, 4] acercas el cursor a algún punto ya definido hasta que diga "por este punto" y das Enter, mueves el cursor de nuevo hacia el otro punto hasta que diga "por este punto" y de nuevo das Enter. De esa forma queda construida la recta que pasa por los dos puntos dados. ¿Hay diferencia al tratar de mover las rectas en el plano?

5. Punto de intersección. Si haz dibujado dos rectas (Figura 1) puedes definir el punto de intersección [F2, 3]. Sólo selecciona esta opción, acércate a una de las rectas hasta que diga "esta recta" y oprime Enter. Después mueve el cursor hacia la otra recta y también selecciónala. Aparecerá entonces el punto de intersección. En este momento puedes asignarle un nombre. Nota que ese punto no puede moverse, ni siquiera puede tomarse con la mano. ¿Puedes hacer que un punto aparezca y desaparezca de la pantalla?

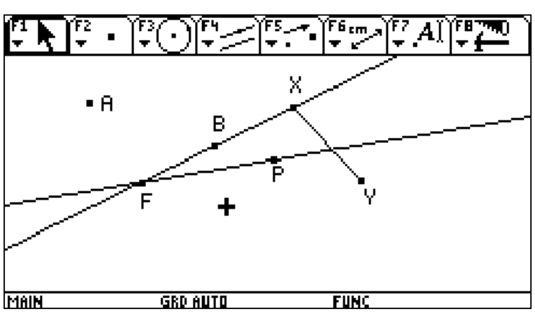


Figura 1. Objetos geométricos básicos

Además del punto, segmento, recta, semirrecta, es posible construir otros objetos geométricos. Consideremos el menú de F3

1. La circunferencia [F3, 1] se construye definiendo un punto y su radio. Tanto el punto como el radio pueden definirse de entrada o seleccionar puntos ya creados para construirla.

2. El arco [F3, 2] se construye especificando tres puntos. Esos tres puntos pueden pertenecer a un objeto o puedes definirlos de entrada.

3. El triángulo [F3, 3] se construye definiendo los tres vértices.

4. El polígono requiere que lo definas con ‘n’ puntos, iniciándolo en uno de ellos y terminando en ese mismo.

Tanto el triángulo como el polígono los puedes construir también con segmentos. ¿Qué diferencias hay en esas construcciones? Para contestar construye un triángulo [F3, 3] y otro con segmentos. Intenta moverlos desde los vértices o de los lados.

5. Para construir el polígono regular [F3, 5] necesitas definir un punto que será el centro, mover el cursor para definir el círculo circunscrito y por último definir el número de lados. Para cada uno de los tres elementos es necesario mover el cursor y dar Enter. ¿Puedes construir un triángulo (o un polígono) dentro de un círculo y hacerlo girar? (ver Figura 2)

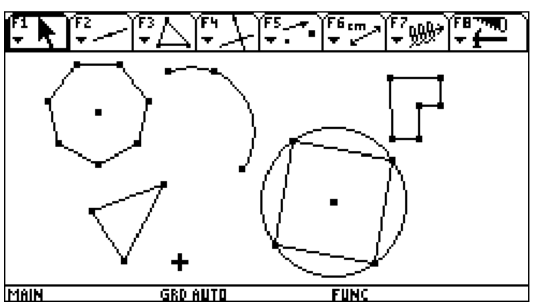


Figura 2. Construcción de polígonos y círculos

Operaciones geométricas

En el menú de F4 están definidas las construcciones básicas de la geometría. Consideraremos la Recta Perpendicular, la Recta paralela, el Punto Medio, la Mediatriz de un segmento, la Bisectriz de un ángulo. También veremos el uso del compás y la transferencia de medidas.

1. Recta perpendicular. Para construirla es necesario definir un punto por el que pasará la recta perpendicular y la recta o segmento al cual será perpendicular.

2. Recta paralela. Para construirla es necesario definir un punto por el que pasará la recta paralela y la recta o segmento al cual será paralela.

3. El punto medio se construye definiendo los dos puntos entre los cuales estará el punto medio.

4. La mediatriz requiere dos puntos o un segmento para construirla.

5. La bisectriz requiere definir el ángulo para construirse. Para definir el ángulo es necesario indicar tres puntos; el primero debe estar en uno de los lados del ángulo, el segundo punto debe ser el vértice y el tercer punto debe estar en el otro lado del ángulo.

6. Para usar el compás es necesario definir el punto de apoyo y su abertura. El punto de apoyo puede ser cualquier punto, pero la abertura debe definirse con un segmento dado o con dos puntos que son los extremos del segmento (radio del círculo).

¿Puedes construir un triángulo y encontrar su incentro? El incentro es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos. Es el centro del círculo inscrito en el triángulo.

¿Puedes construir el círculo circunscrito a un triángulo? Necesitas encontrar el circuncentro; punto de intersección de las mediatrices de los lados (ver Figura 3). Puedes esconder objetos [F7, 1].

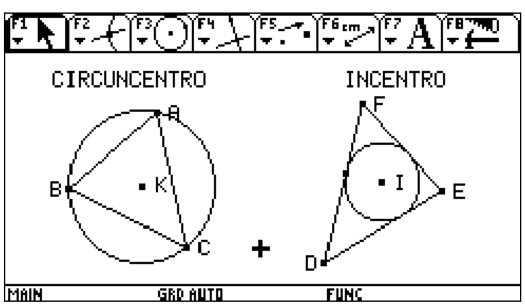


Figura 3. Operaciones geométricas básicas.

7. También puedes medir ángulos [F6, 1]. Construye la siguiente figura: 1) Haz un circulo. 2) Determina tres puntos sobre el circulo. 3) Construye la Figura 4 y observa la relación entre los ángulos A y B

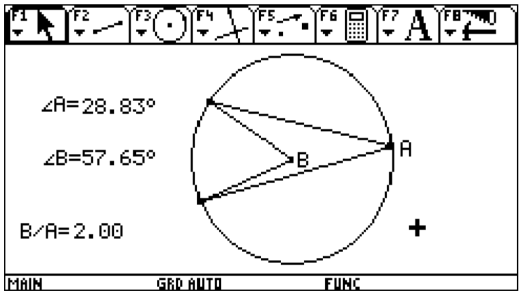


Figura 4. Medición y prueba visual.

Actividades de clase

División de un segmento

En esta actividad se utilizó el Teorema de Tales para dividir un segmento dado en “n” partes iguales (ver Figura 5). Construye un segmento AB. Ahora traza una semirrecta que inicie en A y que no pase por B. Construye una circunferencia con centro en A y una abertura cualquiera (no muy grande porque puedes necesitar espacio). Llama X al punto de intersección de la circunferencia con la semirrecta. Construye otra circunferencia con centro en X y que pase por A. Llama Y al punto de intersección de esta nueva circunferencia con la semirrecta. Construye otra circunferencia con centro en Y y que pase por X. Llama Z al punto de intersección de esta nueva circunferencia con la semirrecta. Ahora traza un segmento ZB. Traza una paralela al segmento ZB que pase por Y. Llama F al punto de intersección de la paralela con el segmento AB. Traza otra recta paralela a ZB que pase por X. Llama D al punto de intersección de esta paralela con el segmento AB. Mide las distancias AD, DF y FB. Después de hacer estas acciones, debió quedar una figura similar a la Figura 5.

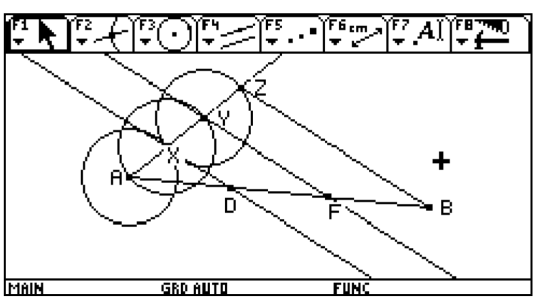


Figura 5. División de un segmento utilizando el teorema de Thales.

¿Qué relación hay entre los segmentos AD, DF y FB? ¿Qué pasa con los puntos D y F si mueves el punto X o si cambias la dirección de la semirrecta? ¿Qué pasa si tomas al punto B y lo mueves? ¿Por qué crees que se da esa relación entre los segmentos? ¿Qué pasaría si las circunferencias que construiste fueran de diferentes tamaños? ¿Cómo harías para dividir un segmento MN en cinco partes iguales?

También se puede dividir un segmento en una razón dada. Por ejemplo, el punto R divide al segmento PQ en una razón de 2:5 (se lee dos a cinco). En la Figura 6, las distancias entre pares de puntos consecutivos es siempre la misma.

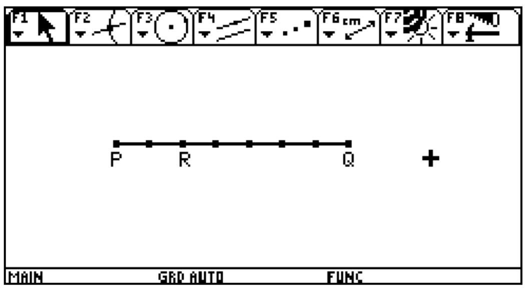


Figura 6. División de un segmento en una razón dada.

¿Por qué crees que la razón es 2:5? ¿Cómo harías para dividir un segmento dado en una razón de 1:3? y ¿de 4:2? Supongamos que se te da una cuerda de 40 cm. ¿A qué distancia de los extremos harías el corte para dividirlo en una razón de 3:5?

Semejanza de triángulos.

Cuando se habla de semejanza de triángulos se refiere a dos o más triángulos que tienen sus ángulos iguales (m∠A = m∠A', m∠B = m∠B', m∠C = m∠C') y sus lados son proporcionales ($\frac{a}{a'} = k$, $\frac{b}{b'} = k$, $\frac{c}{c'} = k$). Se deben cumplir las seis condiciones.

Pero surge la pregunta: ¿cómo puedo construir un triángulo semejante a uno dado?, o ¿Es necesario observar las seis condiciones para afirmar que dos triángulos son semejantes?

Se muestra enseguida como construir dos triángulos semejantes utilizando los teoremas AA, LAL y LLL. Estos teoremas garantizan que el cumplimiento de esas dos o tres condiciones en dos triángulos, determina su semejanza.

Teorema AA. Se construye un triángulo ABC cualquiera [F3, 3]. Ahora se toma un punto cualquiera del plano [F2, 1] que corresponderá con el vértice A, sea A’. Se trazan paralelas [F4, 2] a los lados AB y AC del triángulo dado que pasen por el punto A’. Hacer esto garantiza que los ángulos A y A’ serán iguales. Ahora tracemos un punto cualquiera sobre una de las recta paralelas [F2, 2], considerando la parte de la recta que forma el ángulo del triángulo, por ejemplo un punto B’ sobre la recta paralela a AB. Por ese punto tracemos una paralela al lado BC del triángulo [F4, 2]. Esto garantiza que los ángulos B y B’ sean iguales. Notemos que las tres rectas forman un triangulo A’B’C’, el cual resulta ser semejante con el triángulo ABC. En base a la construcción de un triángulo con dos ángulos iguales al triángulo dado, hemos construido uno semejante. Podemos confirmar la semejanza midiendo los lados y observando la proporcionalidad de los lados.

Puedes tomar uno de los vértices del triángulo ABC y moverlo para ver como se mantiene la semejanza. También puedes cambiar la constante de proporcionalidad moviendo el punto B’.

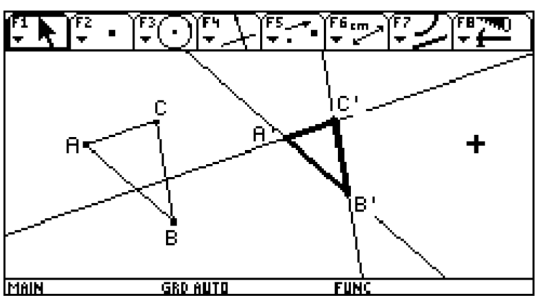


Figura 7. Construcción de un triángulo semejante utilizando el teorema AA.

Teorema LLL. Iniciemos construyendo un triángulo ABC cualquiera. Para determinar lados proporcionales necesitamos una constante de proporcionalidad, así que construyamos un segmento [F2, 5] cuya medida [F6, 1] sea esa constante de proporcionalidad.

Ahora procedamos a medir cada lado del triángulo [F6, 1]. La idea básica para trazar segmentos proporcionales, consiste en dividir la longitud de cada segmento por la medida que constituye la constante de proporcionalidad. Hagamos esas divisiones [F6, 6] y pongamos los resultados en los lados correspondientes del triángulo original. Probablemente sea necesario ir haciendo uno por uno para acomodarlos con el lado correspondiente y no confundirnos. Ya que tenemos las medidas de los lados proporcionales (los cuales pueden cambiarse al cambiar la medida del segmento que determina la constante de proporcionalidad), procedamos a construir el triángulo. Iniciemos construyendo un punto cualquiera [F2, 1], que será el correspondiente a uno de los vértices del triangulo original, por ejemplo B'. Ahora procedamos a construir los lados AB y CB. Antes de proceder, tal vez convenga hacer que la constante de proporcionalidad sea mayor que la unidad para no tener lados tan grandes. Muy bien, utilicemos la función "transferencia de medidas" [F4, 9]. Acerquemos el lápiz al resultado de la proporción del lado AB, hasta que diga "este número" y demos un enter. Movamos ahora el cursor al punto B´ hasta que diga "este punto" y demos otro enter. Aparece un segmento punteado que puedes mover con las flechas hasta que veas el extremo del segmento y das otro enter. La distancia de B' al extremo del segmento es igual a la medida que seleccionamos, la hemos transferido, por lo tanto ese extremo corresponde con A'. Necesitamos encontrar el punto C´. para ello transferimos las medidas del lado BC al punto B' y construimos una circunferencia con centro en B' y radio hasta el extremo del segmento. Hacemos lo mismo para el lado AC, transfiriéndolo al punto A' y de esa forma tendremos dos circunferencias que se intersecan en dos puntos. Cualquiera de ellos puede ser C'. Al hacer esto nos hemos asegurado de construir un triángulo con tres segmentos proporcionales a los lados del triángulo original, resultando en un triángulo semejante. Puedes confirmarlo midiendo dos de sus ángulos.

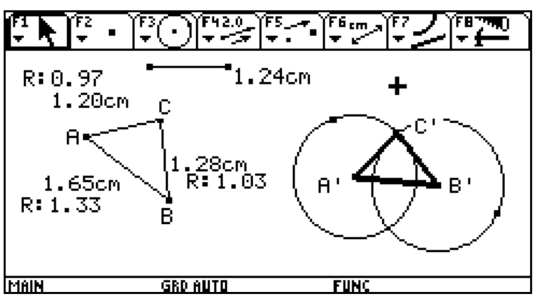


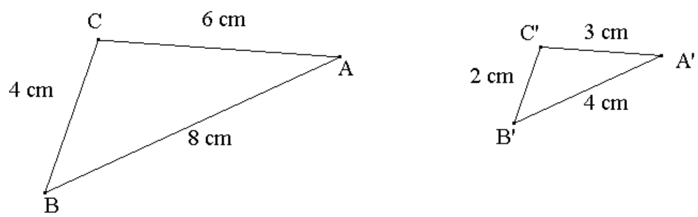
Figura 8. Construcción de un triángulo semejante utilizando el teorema LLL.

Puedes interactuar con la construcción cambiando la constante de proporcionalidad o moviendo los vértices del triángulo original. ¿Cómo harías para construir un triángulo semejante utilizando el teorema LAL?

Actividad independiente.

Los estudiantes trabajaron con sus calculadoras bajo la supervisión docente, en actividades que intentaban reforzar los contenidos y el análisis en el Cabri Geometry. Las actividades fueron guardadas en sus calculadoras y la investigadora pudo evaluarlas de forma independiente. La actividad consistió en las siguientes acciones:

1. Escribe las dos condiciones para semejanza entre triángulos
2. Construye un triángulo ABC en el lado izquierdo de la pantalla y un triángulo del lado derecho que sea semejante (sugerencia: para lograr esto primero da la constante de proporcionalidad que vas a utilizar y las medidas y recuerda medir los ángulos que deben medir lo mismo, recuerda que puedes mover los lados hasta que lleguen a tus medidas si presionas la manita y arrastras un vértice). No se permite utilizar las mismas medidas dadas en el siguiente ejemplo.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

3. Construye dos triángulos en los que se pueda decir que son semejantes por el teorema de AA.
4. Construye dos triángulos en los que se pueda decir que son semejantes por el teorema de LAL.
5. Construye dos triángulos en los que se pueda decir que son semejantes por el teorema de LLL.

Resultados

Antes de considerar los resultados del estudio, es importante mencionar que la confiabilidad (consistencia interna) de la escala actitud hacia las matemáticas, resulta con valores aceptables tanto en la primera (α = .891) como en la segunda aplicación (α = .883). Además, hay una correlación positiva y fuerte entre los resultados de la primera y segunda aplicación (r = .863, p = .000), lo cual da una idea de la confiabilidad utilizando el criterio de pre-prueba y pos-prueba.

Descriptivos de las variables en el grupo control

En el grupo control se valoraron los conocimientos del tema de matemáticas y la actitud hacia las matemáticas en dos momentos: al inicio del periodo dedicado al tratamiento en el grupo experimental y al final del mismo.

Respecto al nivel de conocimiento en matemáticas, antes de estudiar el tema respectivo, los estudiantes mostraron un conocimiento bajo (*M* = 4.1, *DE* = 1.67), pero después de dedicar dos semanas al estudio, mediante estrategias tradicionales de enseñanza aprendizaje, su calificación media se incremento (*M* = 7.4, *DE* = 1.90). La Tabla 1 muestra cada una de las 7 preguntas y 4 problemas incluidos en los exámenes previo y posterior. Se puede observar el cambio de aprendizaje en cada declaración como grupo. Con excepción de tres preguntas, se observa un incremento positivo en la mayoría de las declaraciones. Se observan dos preguntas (1 y 2) y dos problemas (9 y 10) en los cuales hubo un incremento importante de alumnos que pudieron contestar correctamente después de las clases. También se observa que ya tenían idea de algunos conceptos tales como los involucrados en las preguntas 6a y 3 por ejemplo, donde aproximadamente el 60% de los alumnos contestaron correctamente antes de estudiar los contenidos.

Tabla 1

Frecuencia de respuestas correctas a los exámenes en el grupo control

	Pre	Post	Incremento
Pregunta 1	11	27	16
Pregunta 2	9	26	17
Pregunta3	20	21	1
Pregunta 4	9	20	11
Pregunta5	16	26	10
Pregunta 6 a	24	25	1
Pregunta 6 b	15	14	-1
Pregunta 6c	19	21	2
Pregunta 7	4	2	-2
Pregunta 8	0	0	0
Pregunta 9	0	17	17
Pregunta 10	1	18	17
Pregunta 11	0	1	1

La actitud hacia las matemáticas, en términos generales también se incremento. La valoración inicial tuvo una media aritmética de 56.2 (*DE* = 10.85), mientras que en la valoración final la media fue de 59.4 (*DE* = 9.69). Según las desviaciones, no sólo se incrementó la actitud sino también se incremento el grado de acuerdo en el grupo. Recordando que la escala era de 15 a 75, ambos valores están alrededor del 70% (69% y 74% respectivamente) del máximo valor posible de actitud hacia las matemáticas. En la Tabla 2, se puede observar que el nivel más alto de actitud en la primera evaluación, ocurre en el sentido de considerar a las matemáticas como algo útil para desarrollar la mente y el pensamiento (*M* = 4.7, *DE* = 0.55). Contrariamente, la valoración más baja de actitud, después de la recodificación, se percibe en el deseo de tomar mas cursos de matemáticas que los obligatorios (*M* = 3.1, *DE* = 1.10). Inclusive en la segunda observación se mantienen las mismas declaraciones como primera y última en cuanto al aporte que dan a la actitud hacia las matemáticas. En las declaraciones que valoran si las matemáticas son aburridas y el gusto por las mismas, se observa un cambio neto mayor en la media aritmética. En ambos casos el incremento es positivo ya que son declaraciones inversas.

Tabla 2

Descriptivos de las declaraciones de actitud hacia las matemáticas en el grupo control

	PRE		POS	
	M	*SD*	*M*	*SD*
Matemáticas es una materia muy interesante	4.1	0.64	4.1	1.03
Quiero desarrollar mis habilidades matemáticas	4.2	0.85	4.2	0.77
Matemáticas es una materia muy valiosa	4.2	1.00	4.1	0.82
Las matemáticas me hacen sentir nervioso e incómodo *	2.7	1.24	2.4	1.14
En general he disfrutado al estudiar matemáticas en la escuela	3.8	1.07	4.0	1.05
Quiero tomar más cursos de matemáticas de los obligatorios	3.1	1.10	3.2	1.17
Otras materias son más importantes que las matemáticas *	2.6	1.10	2.6	0.95
Me siento muy tranquilo cuando estudio matemáticas	3.1	1.32	3.5	1.14
Casi nunca me ha gustado estudiar matemáticas *	2.7	1.32	2.2	1.02
Estoy interesado en adquirir más conocimientos de matemáticas	3.8	0.99	4.0	0.98
Las matemáticas ayudan a desarrollar la mente y enseñan a pensar	4.7	0.55	4.6	0.63
Las matemáticas son especialmente importantes en la vida cotidiana	4.3	0.75	4.0	0.91
Las matemáticas son aburridas *	2.5	1.28	2.0	0.96
Me gusta intentar resolver problemas nuevos en matemáticas	3.5	1.22	3.7	1.17
Las matemáticas son divertidas	3.3	1.17	3.6	1.08

* Declaraciones recodificadas (se muestran los valores observados).

Descriptivos de las variables en el grupo experimental

En el grupo experimental se valoraron las mismas variables que en el grupo control y en los mismos dos momentos: antes y después del tratamiento. Al final del tratamiento se valoró mediante tres declaraciones, la actitud hacia el uso de la calculadora en la clase de matemáticas.

Respecto al nivel de conocimiento en matemáticas, antes de estudiar el tema respectivo utilizando la calculadora los estudiantes mostraron un conocimiento bajo (*M* = 3.7, *DE* = 1.75), pero después de dedicar dos semanas al estudio, su calificación media se incremento (*M* = 8.1, *DE* = 2.14). En la Tabla 3 se observan las frecuencias de respuestas correctas a los exámenes previo y posterior en el grupo experimental. Se percibe un mayor incremento en la resolución de los problemas, específicamente en los problemas 9 y 10. Sólo se perciben un problema y una pregunta donde no hubo incremento positivo en la cantidad de estudiantes que contestaron correctamente.

Tabla 3

Frecuencia de respuestas correctas a los exámenes en el grupo experimenta

	Pre	Post	Incremento
Pregunta 1	7	23	16
Pregunta 2	14	19	5
Pregunta 3	23	26	3
Pregunta 4	7	21	14
Pregunta 5	13	23	10
Pregunta 6 a	19	22	3
Pregunta 6 b	13	20	7
Pregunta 6 c	11	19	8
Pregunta 7	8	8	0
Pregunta 8	0	0	0
Pregunta 9	1	21	20
Pregunta 10	0	24	24
Pregunta 11	0	0	0

La actitud hacia las matemáticas disminuyó en términos generales. La valoración inicial tuvo una media aritmética de 54.8 (*DE* = 9.26), mientras que en la valoración final la media fue de 54.0 (*DE* = 8.88). Según las desviaciones, no sólo disminuyó la actitud sino también se incrementó el grado de acuerdo en el grupo. Recordando que la escala era de 15 a 75, ambos valores se aproximan al 65% (66% y 65% respectivamente) del máximo valor posible de actitud hacia las matemáticas. En la Tabla 4, se puede observar que el nivel más alto de actitud en la primera evaluación, ocurre en el sentido de considerar a las matemáticas como algo útil para desarrollar la mente y el pensamiento (*M* = 4.6, *DE* = 0.62). Contrariamente, la valoración más baja de actitud, después de la recodificación, se percibe en el nerviosismo e incomodidad hacia las matemáticas (*M* = 2.9, *DE* = 1.16), aunque se encuentra en un nivel muy similar con el sentirse tranquilo cuando estudia matemáticas (M = 3.0, DE = 1.05). Inclusive en la segunda observación se mantienen las mismas declaraciones como primera y última en cuanto al aporte que dan a la actitud hacia las matemáticas. En la declaración que considera a otras materias más importantes que las matemáticas se observa un cambio neto mayor en la media aritmética. En este caso el incremento es negativo ya que al ser declaración inversa, disminuye la valoración de la actitud hacia las matemáticas.

Tabla 4

Descriptivos de las declaraciones de actitud hacia las matemáticas en el grupo experimental

	PRE		POS	
	M	*SD*	*M*	*SD*
Matemáticas es una materia muy interesante	3.8	0.91	4.0	0.92
Quiero desarrollar mis habilidades matemáticas	4.1	0.79	4.0	0.87
Matemáticas es una materia muy valiosa	4.3	0.79	4.2	0.93
Las matemáticas me hacen sentir nervioso e incómodo *	3.1	1.16	2.8	1.21
En general he disfrutado al estudiar matemáticas en la escuela	3.5	0.85	3.4	0.96
Quiero tomar más cursos de matemáticas de los obligatorios	3.1	1.14	3.3	1.32
Otras materias son más importantes que las matemáticas *	2.3	1.29	3.4	1.47
Me siento muy tranquilo cuando estudio matemáticas	3.0	1.05	3.4	1.14
Casi nunca me ha gustado estudiar matemáticas *	2.8	1.30	2.7	1.34
Estoy interesado en adquirir más conocimientos de matemáticas	3.8	1.16	3.7	1.04
Las matemáticas ayudan a desarrollar la mente y enseñan a pensar	4.6	0.62	4.5	0.65
Las matemáticas son especialmente importantes en la vida cotidiana	4.3	0.84	4.4	0.80
Las matemáticas son aburridas *	2.5	1.28	2.4	1.12
Me gusta intentar resolver problemas nuevos en matemáticas	3.5	0.81	3.5	1.03
Las matemáticas son divertidas	2.8	1.32	3.1	0.99

* Declaraciones recodificadas (se muestran los valores observados).

Como parte de la evaluación de la actitud en la segunda valoración, se consideraron tres indicadores que brindasen información respecto a la actitud hacia el uso de la calculadora en la clase de matemáticas. La confiabilidad de la escala es aceptable (α = .616) en función de la cantidad de declaraciones y de individuos que las contestaron (N = 25). En la Tabla 5 se puede observar que el aspecto más favorable de la actitud hacia el uso de la calculadora, se da en el sentido de que no perciben que complique las matemáticas (M = 4.0, DE = 1.02) a pesar de que no están tan seguros de que pueda ayudarles a aprenderlas (M = 3.3, DE = 1.22).

Tabla 5

Descriptivos de los indicadores de actitud hacia el uso de la calculadora en el aprendizaje de las matemáticas

	N	*M*	*SD*
Me siento más cómodo usando la calculadora	26	3.73	1.041
La calculadora complica las matemáticas*	25	1.96	1.020
Creo que la calculadora me ayuda a aprender matemáticas	26	3.27	1.218

* Declaración recodificada (se muestran los resultados observados)

Con la intención de conocer la opinión de los estudiantes al trabajo realizado con la calculadora, se les hizo una pregunta abierta a la que contestaron 18 estudiantes lo siguiente: 7 dijeron que había estado bien, 6 dijeron que fue menos aburrido, 5 mencionaron que la calculadora era confusa de manejar, 3 dijeron que era interesante y sencillo, 2 dijeron que habían aprendido. Un estudiante dijo que le había dado seguridad mientras que otro cree que es mejor usar el cerebro.

Prueba de hipótesis

Como parte de la investigación se plantearon dos hipótesis para las cuales se dan los resultados obtenidos.

Ho1: El uso del Cabri Geometry en la clase de matemáticas no genera un aprendizaje significativamente mayor.

Para probar esta hipótesis es necesario que no exista diferencia significativa en la preprueba de los grupos experimentales y de control, además de que exista una diferencia significativamente mayor en la posprueba del grupo experimental con respecto al grupo control. La primera condición se satisface según la prueba *t* de Student para muestras independientes ($t_{(60)} = 0.891$, $p = .376$), pero la segunda condición no se satisface ya que según la misma prueba resultan ser estadísticamente iguales ($t_{(56)} = 1.327$, $p = .190$). Se concluye entonces que no hay evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula, aceptando que el uso del Cabri Geometry no genera un aprendizaje significativamente mayor de la geometría en estudiantes de tercero de secundaria.

En relación con esta misma hipótesis se consideró la posibilidad de que hubiese diferencia en los incrementos del conocimiento en los estudiantes. Para ello se calculó el incremento de calificación de los estudiantes al considerar la pre-prueba y la pos-prueba. Según la prueba *t* de Student, existe diferencia en el incremento de conocimiento individual de los estudiantes ($t_{(55)}$ = 2.013, *p* = .049), siendo el incremento individual significativamente mayor en los estudiantes del grupo experimental (*M* = 4.5, *DE* = 2.16) que en el grupo control (*M* = 3.4, *DE* = 2.03).

Ho2: El uso del Cabri Geometry en la clase de matemáticas no genera un incremento en la actitud hacia las matemáticas.

Para probar esta hipótesis es necesario que no exista diferencia significativa en la actitud previa de los grupos experimentales y de control, además de que exista una diferencia significativamente mayor en la actitud posterior del grupo experimental con respecto al grupo control. La primera condición se satisface según la prueba *t* de Student para muestras independientes ($t_{(48)}$ = 0.463, *p* = .646), pero la segunda condición no se satisface ya que a pesar de que la misma prueba estadística indica que hay diferencia ($t_{(46)}$ = 2.022, *p* = .049), la media del grupo control (*M* = 59.4, *DE* = 9.69) resulta ser mayor que la del experimental (*M* = 54.0, *DE* = 8.88). Se concluye entonces que no hay evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula, aceptando que el uso del Cabri Geometry no genera una actitud hacia las matemáticas significativamente mayor en estudiantes de tercero de secundaria. Tampoco se encontró diferencia significativa en los incrementos de actitud hacia las matemáticas.

Otros resultados

Como inquietud extra al problema de investigación se consideró la relación entre las actitudes previa y posterior así como las calificaciones en la pre-prueba y la pos-prueba de los grupos tanto de control como el experimental.

En el grupo control sólo se encontró correlación significativa y alta entre las actitudes previa y posterior (*r* = .848, *p* = .000). En el grupo experimental, además de existir relación alta entre las actitudes (*r* = .871, *p* = .000), también se da una correlación media entre las calificaciones de la pre-prueba y la pos-prueba (*r* = .405, *p* = .036). En este mismo grupo se percibe una relación media entre la actitud y calificaciones posteriores (*r* = .396, *p* = .062) que tal vez con una muestra mayor llegaría a ser significativa.

Discusión y conclusiones

Al comprar los resultados de los grupos experimental y de control en las preguntas del examen de conocimiento, se observa que: según las respuestas a la pregunta dos, el grupo control contestó mejor respecto a la proporcionalidad como razón entre segmentos, pero el grupo experimental respondió mejor respecto a la congruencia y paralelismo, asociado esto a relaciones entre objetos geométricos. Esta diferencia de percepción, una ligada al lenguaje aritmético y la otra al geométrico, podría ser un indicador de las ventajas que conlleva el Cabri Gemetry en la visualización o manipulación de objetos geométricos. De hecho, Del Puerto y Minnaard (2003) afirman que la calculadora estimula en los estudiantes la visualización y también de acuerdo con la idea Fauren y Goarín (citados por Trouche 2005), cuando explican que la mayor utilidad que los alumnos le dan a las calculadoras es para visualizar. En este sentido parece conveniente dedicar más investigación al respecto, ya que de ser así, el Cabri Geometry podría favorecer la interacción de lenguajes para la adquisición de conceptos.

También se observa, a nivel de respuestas al examen, que hay ventaja en el grupo experimental respecto a la resolución de problemas, específicamente el nueve y el diez. Aproximadamente un 10% más de los estudiantes pudieron resolver los problemas en el grupo experimental respecto al grupo control. Aunque esta diferencia podría deberse al azar, sería conveniente investigar la relación que pudiese existir entre la habilidad para resolver problemas asociados a la geometría y el manejo de ambientes de geometría dinámica.

El uso tanto del software Cabri Geometry como de las calculadoras puede requerir de más tiempo, como prueba de esto están las cuatro horas extras que se tuvo con los alumnos del grupo experimental debido a su poca familiaridad con la calculadora. Apoyando esto encontramos a Laborde (2001) quien explica que el proceso de integrar la calculadora es un proceso largo y complejo, también Assude (2005) quien concuerda diciendo que el uso de software requiere de tiempo. En este sentido cabe mencionar que algunos comentarios de los estudiantes giraron en torno al grado de dificultad que involucra el manejo de la voyage 200 o la Titanium. Sería interesante realizar una investigación similar utilizando el Cabri Geometry para PC. Su manejo en una computadora personal es más amigable y ágil, además de que la resolución de las figuras es de mejor calidad. Aunado a esta situación, otro factor asociado y que probablemente alteró los resultados, es que los alumnos no tenían las calculadoras con ellos todo el tiempo. Según Fauren y Goarín (citados por Trouche 2005), los alumnos se relacionan más con las calculadoras fuera del salón de clases.

A pesar de que no hubo diferencia significativa en las calificaciones finales al comparar el grupo experimental con el de control, si se observan diferencias significativas en las diferencias de conocimiento. Es decir, si se considera el aprendizaje de cada estudiante como la diferencia del conocimiento final menos el inicial, el grupo experimental muestra un aprendizaje mayor. Esto concuerda con los comentarios de Gómez (citado por Del Puerto y Minnaard, 2003) quien ha apreciado que el uso de la calculadora provoca mayor rendimiento matemático en los alumnos. En este sentido es posible concluir que el Cabri Geometry generó mayor aprendizaje que el método tradicional de enseñanza.

Aunque Gómez (1997) ha afirmado que la calculadora provoca un cambio en las actitudes de los estudiantes, en el caso de esta investigación no se percibe un incremento. Si se percibe un incremento en el grupo control, y esto podría deberse a la novedad de contar con una maestra diferente, pero en el grupo experimental la actitud hacia las matemáticas permanece estable. Contrastando con el aprendizaje de la geometría, tal vez un cambio de actitud basado en el uso de la tecnología no sea perceptible en tan poco tiempo. Hay que recordar que los estudiantes no habían tenido en sus manos una calculadora de este tipo, era una nueva experiencia y tal vez el equipo no fue el adecuado para las actividades que se realizaron.

Referencias

Ab´anades, M. A., Escribano, J. y Botana, F. (2007). First steps on using open math to add proving capabilities to standard dynamic geometry systems. *Lecture Notes in Computer Science*, 4573, 131-145.

Assude, T. (2005). Time management in the work economy of a class, a case study: Integration of cabri geometry in primary school mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 183-203.

Carrillo de Albornoz Torres, A. (2006). Interpretación matemática con calculadora gráfica. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 7, 99-105. Recuperado de la página web: www.fisem.org/paginas/union/descargar.php?id=147&modo=a

Del Puerto y Minnaard (2003). La calculadora: una herramienta didáctica para el 2º ciclo de la EGB. *Revista Iberoamericana de Educación, 33*(3), 1-12.

Eduteka. (2004). *Cabri Géomètre*. Recuperado de la página web: http://www.eduteka.org/directorio/index.php?t=sub_pages&cat=363

Gómez, P. (1997). Calculadoras gráficas y precálculo. Efectos en el rendimiento de los estudiantes. *Universidad de los Andes: Centro de Investigación 'una empresa docente'.* Recuperado de la página web: http://ued.uniandes.edu.co

Hadas, N., Hershkowitz, R. y Schwarz, B. B. (2002) Analyses of activity design in geometry in the light of student actions. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 2 (4), 529- 552. DOI: 10.1080/14926150209556539.

Hölzl, R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2, 169-187. DOI: 10.1023/A:1013361712895.

Laborde, C. (2001) Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 151-161.

Moreno Armella., L. (2003). Cognición y computación el caso de la geometria y la visualizacion. Extraído por Eduteka de Moreno, Luis. (2002). *Memorias del seminario nacional de docentes: Uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional de Colombia. Recuperado de la página web: http://www.eduteka.org/ GeometriaVisual.php

Straesser, R. (2002). Cabri-géomètre: Does dynamic geometry software (DGS) change geometry and its teaching and learning. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3, 319-333.

Trouche, L. (2005). Calculators in mathematics education: A rapid evolution of tools, with differential effects. *Mathematics Education Library*, 36, 9 – 39.